ASI 3

Méthodes numériques pour l'ingénieur

Résolution de systèmes linéaires par des méthodes itératives :

Jacobi, Gauss Seidel, relaxation

Résoudre un système linéaire

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 & = -6 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 & = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 & = 8 \\ - x_2 + 2x_3 + x_4 & = 6 \end{cases}$$

soit $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4)$ une "presque" solution

imaginons que $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ avec par exemple $dist(A, \tilde{A}) < \varepsilon$

si on essayait : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-6 - 4\tilde{x}_2 + 2\tilde{x}_3}{2} \\ x_2 = \dfrac{0 - \tilde{x}_1 - \tilde{x}_4}{3} \\ x_3 = \dfrac{8 - 3\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_4}{1} \\ x_4 = \dfrac{6 + \tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_3}{1} \end{cases}$ soit $x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j}{a_{ii}}$

Résoudre un système linéaire en itérant

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-6 - 4\tilde{x}_2 + 2\tilde{x}_3}{2} \\ x_2 = \dfrac{0 - \tilde{x}_1 - \tilde{x}_4}{3} \\ x_3 = \dfrac{8 - 3\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_4}{1} \\ x_4 = \dfrac{6 + \tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_3}{1} \end{cases} \quad \text{soit} \quad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j}{a_{ii}}$$

Si Ax n'est pas encore égale à b, on recommence !

tant que $dist(Ax_{new}, b) > \varepsilon \qquad (i.e. 10^{-12})$

$$x_i^{\text{new}} = \frac{b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{\text{old}}}{a_{ii}}$$

fin

Osons itérer ! méthode de Jacobi

tant que $dist(Ax_{new}, b) > \varepsilon \qquad (i.e. 10^{-12})$

$$x_i^{\text{new}} = \frac{b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{\text{old}}}{a_{ii}}$$

fin

Soit D la diagonale de la matrice A, et G le reste :
$A = D+G$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{i-1,i} & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i,i-1} & 0 & a_{i-1,i} & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & a_{i,i+1} & 0 & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

new old new −1 old

Gauss Seidel

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -6 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-6 - 4\tilde{x}_2 + 2\tilde{x}_3}{2} \\ x_2 = \dfrac{0 - x_1 - \tilde{x}_4}{3} \\ x_3 = \dfrac{8 - 3x_1 + x_2 - 2\tilde{x}_4}{1} \\ x_4 = \dfrac{6 + x_2 - 2x_3}{1} \end{cases} \quad \text{soit } x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \tilde{x}_j}{a_{ii}}$$

méthode de Gauss-Seidel

tant que $dist(Ax_{new}, b) > \varepsilon \qquad (i.e.\, 10^{-12})$

$$x_i^{\text{new}} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{\text{new}} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{\text{old}}}{a_{ii}}$$

fin

Soit E la triangulaire inférieure et F la supérieure de la matrice A :
$A = D+E+F$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i,i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{i,i+1} & 0 & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{i-1,i} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{i-1,i} & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

new old new $^{-1}$ old

La relaxation

$$x^{new} = \varphi\left(x^{old}\right)$$

$$x_r^{new} = \omega x^{new} + (1-\omega)x^{old}$$

$\omega > 0$: paramètre de relaxation

$$\begin{cases} \omega \in \left]0,1\right[: \text{interpolation} \\ \omega = 1 : \text{status quo} \\ \omega \in \left]1,2\right[: \text{extrapolation} \end{cases}$$

Jacobi:

$$x^{\text{new}} = (D)^{-1}\left(b - (E+F)x^{\text{old}}\right)$$

$$x_r^{new} = \omega(D)^{-1}\left(b - Gx^{\text{old}}\right) + (1-\omega)x^{\text{old}}$$

en multipliant par D

$$Dx_r^{new} = \omega b + ((1-\omega)D - \omega G)x^{\text{old}}$$

Gauss–Seidel :

$$x^{\text{new}} = (D+E)^{-1}\left(b - Fx^{\text{old}}\right)$$

$$x_r^{new} = \omega(D+E)^{-1}\left(b - Fx^{\text{old}}\right) + (1-\omega)x^{\text{old}}$$

$$(D+\omega E)x_r^{new} = \omega b + ((1-\omega)D - \omega F)x^{\text{old}}$$

Résumé « algorithmique »

$$Mx^{\text{new}} = Nx^{\text{old}} + b$$

Jacobi:

$$Dx^{\text{new}} = \left(b - (E+F)x^{\text{old}}\right) : \begin{cases} M = D \\ N = -E-F \end{cases}$$

Gauss–Seidel :

$$(D+E)x^{\text{new}} = \left(b - Fx^{\text{old}}\right) : \begin{cases} M = D+E \\ N = -F \end{cases}$$

Relaxation :

$$\left(\frac{1}{\omega}D + E\right)x^{\text{new}} = b + \left(\frac{1-\omega}{\omega}D - F\right)x^{\text{old}} : \begin{cases} M = \frac{1}{\omega}D + E \\ N = \frac{1-\omega}{\omega}D - F \end{cases}$$

Convergence

Principes généraux

$$\begin{cases} x^0 & \text{donné,} \\ x^{k+1} = Cx^k + d \end{cases}$$

Théorème : S'il existe une norme matricielle subordonnée telle que $\|C\| < 1$

<u>Alors</u> l'algorithme ci – dessus converge pour tout x^0 vers x^* la solution de :

$$(I - C)x^* = d$$

Éléments de démonstration

- x^* est un point fixe de l'algorithme
- $e^k = x^k - x^*$

$$= Cx^{k-1} + d - Cx^* - d \quad \Leftrightarrow \quad e^k = Ce^{k-1} = C^k e^0$$

$$= C(x^{k-1} - x^*)$$

$$\|e^k\| \le \|C^k\|\|e^0\| \le \|C\|^k\|e^0\| \quad \text{si } \|C\| < 1,\ \|C\|^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Normes matricielles

$$\text{norme} : \begin{cases} n : E \to R^+ \\ \quad x \mapsto n(x) \end{cases} \quad \text{vérifiant} \quad \begin{cases} n(x) \ge 0 \ \text{positivité} \\ n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ n(\lambda x) = |\lambda| n(x) \\ n(x+y) \le n(x) + n(y) \end{cases}$$

exemples $E = R^n$;

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \ ; \ \|x\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p \ (p \ge 1) ; \ \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \ ; \ \|x\|_\infty = \sup_{i=1,n} |x_i|$$

<u>Définition</u>

Soit A une matrice $n \times m$, étant donnée une norme vectorielle, on appelle norme matricielle subordonnée, la norme matricielle définie par :

$$\|A\| = \max_{x \in R^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Conséquence :

Exemples

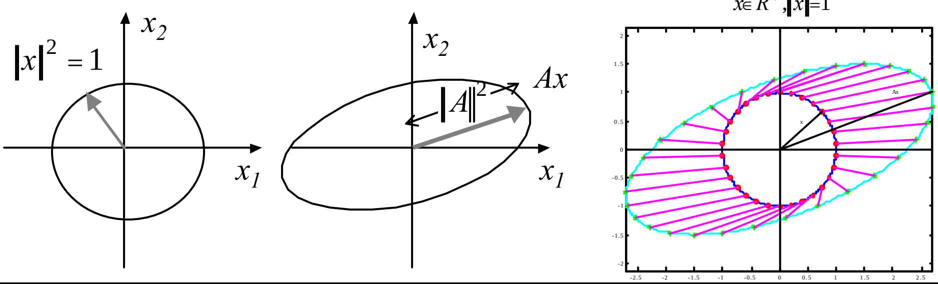
norme de Frobénius : $\|A\|_F^2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = \mathrm{tr}(A'A);$

$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$; $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$;

$\|A\|_1 = \|A'\|_\infty$ *à utiliser pour le calcul !*

Illustration 2d

$\|A\| = \max_{x\in R^n, \|x\|=1} \|Ax\|$



Calculez les valeurs propres de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1 + i\sqrt{2},\ \lambda_3 = 1 - i\sqrt{2}$

Et ses vecteurs propres ?

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2i\sqrt{3}}{3} \\ \frac{i\sqrt{3}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} \frac{2i\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{i\sqrt{3}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Rayon spectrale d'une matrice

<u>Définition</u> *:* on appelle <u>rayon spectrale</u> d'une matrice carrée A, le nombre réel $\rho(A)$ tel que :

$$\rho(A) = \max_{i=1,n} |\lambda_i(A)|$$

<u>Théorème</u> *:* soit A une matrice $n\times m$, alors :

$$\|A\|_F^2 = \rho(A'A)$$

<u>Corollaire</u> *:* si A est une matrice carrée symétrique $n\times n$, alors :

$$\|A\|_F = \rho(A)$$

<u>Remarque</u> *:* en général, le rayon spectrale n'est pas une norme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \|A\|_F = 1 \neq 0, \rho(A) = 0$$

Convergence : le retour

Principes généraux

$$\begin{cases} x^0 & \text{donné,} \\ x^{k+1} = Cx^k + d \end{cases}$$

Théorème : S'il existe une norme matricielle subordonnée telle que

$$\|C\| < 1$$

<u>Alors</u> l'algorithme ci – dessus converge pour tout x^0 vers x^* la solution de :

$$(I - C)x^* = d$$

<u>Théorème</u> *:* les points suivants sont équivalents :

- C est une matrice convergente, (*i.e.* C^k tend vers 0)
- $\rho(C)<1$
- $\|C\| < 1$

Résumé « algorithmique »

$$Mx^{\text{new}} = Nx^{\text{old}} + b$$

Jacobi:

$$Dx^{\text{new}} = \left(b - (E+F)x^{\text{old}}\right) : \begin{cases} M = D \\ N = -E - F \end{cases}$$

Gauss– Seidel :

$$(D+E)x^{\text{new}} = \left(b - Fx^{\text{old}}\right) : \begin{cases} M = D + E \\ N = -F \end{cases}$$

*R*elaxation :

$$\left(\tfrac{1}{\omega} D + E\right)x^{\text{new}} = b + \left(\tfrac{1-\omega}{\omega} D - F\right)x^{\text{old}} : \begin{cases} M = \tfrac{1}{\omega} D + E \\ N = \tfrac{1-\omega}{\omega} D - F \end{cases}$$

Convergence

Théorème *:* Si A est une matrice à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Jacobi converge.

Démonstration

Jacobi:

$$x^{k+1} = (D)^{-1}\left(b - (E+F)x^{k}\right)$$

$$x^{k+1} = Cx^{k} + d \quad \text{avec} \quad C = D^{-1}(E+F), \quad d = D^{-1}b$$

$$\|C\|_{\infty} = \left\|D^{-1}(E+F)\right\|_{\infty} = \max_{i=1,n}\left(\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j \neq i}^{n} |a_{ij}|\right) < 1$$

Remarque *:* il en est de même pour la méthode de Gauss-Seidel

Convergence

Théorème : soit une méthode itérative : $Mx^{k+1} = Nx^{k} + b$

Si A est une matrice symétrique définie positive
telle que si $A = M\text{-}N$ alors $M+N'$ est définie positive
Alors la méthode itérative est convergente

Démonstration A symétrique définie positive $\Leftrightarrow \|x\|_A^2 = \sqrt{x'Ax}$

$$\|M^{-1}Nx\|_A^2 = \left|M^{-1}(M-A)x\right|_A^2 = \left\|x - M^{-1}Ax\right\|_A^2$$

posons $y \equiv M^{-1}Ax \quad \Leftrightarrow \quad My = Ax$

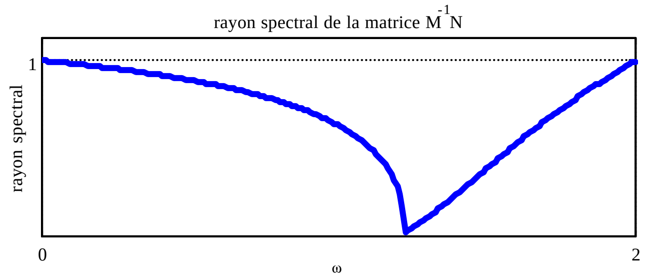
$$\left\|x - M^{-1}Ax\right\|_A^2 = |x-y|_A^2 = (x-y)'A(x-y)'A = \|x\|_A^2 - x'Ay - y'Ax + y'Ay$$

$$= \|x\|_A^2 - y'M'y - y'My + y'Ay = \|x\|_A^2 - y'(M+N')y$$

on a donc: $\left|x - M^{-1}Ax\right|_A^2 < |x|_A^2 \Rightarrow \left\|M^{-1}N\right|_A = \max_{x, |x|_A = 1} \left|M^{-1}Nx\right\|_A < 1$

Théorème : Si A est une matrice symétrique définie positive,
la méthode de la relaxation converge pour : $0 < \omega < 2$

Influence de w



Remarques

pratique :

- pas de preuve de convergence généralisée,
- on préfère la relaxation avec différents tests pour ω,
- on préfère les méthodes directes,
- voir les méthodes semi directes pour les problèmes de grande taille (*cf* les méthodes « multigrilles »),

Conditionnement d'un système linéaire

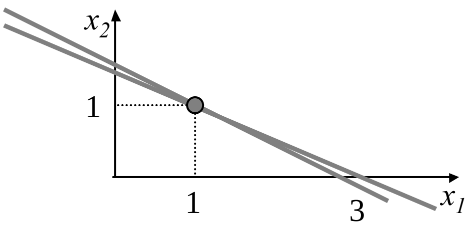
$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

examinons deux solutions

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} r_x = Ax - b = [0 \quad 0]^T \\ r_y = Ay - b = [0 \quad 0.0002]^T \end{cases}$$

$$\|r_x - r_y\| = 0.0002 \quad \text{et} \quad \|x - y\| = 2$$

Deux vecteurs très différents donnent des solutions très proches



Conditionnement : influence du second membre

$$A=\begin{pmatrix}8&10&10&10\\1&5&6&1\\7&10&4&7\\7&8&1&7\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}38\\13\\28\\23\end{pmatrix},\ \text{admet comme solution}\quad x=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$b+\delta b=\begin{pmatrix}38.1\\12.9\\28.1\\22.9\end{pmatrix},\quad x+\delta x=\begin{pmatrix}-34.5\\11.0\\-5.6\\26.0\end{pmatrix}\quad:\quad \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}=3.7\ 10^{-3}\quad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}=22.6$$

$$\lambda_1=24.1,\ \lambda_4=-0.007 : cond(A)=7363$$

$$\begin{aligned} r &= (b-(b+\delta b)) \\ &= Ax - A\tilde{x} && \text{avec } \tilde{x}=(x+\delta x) \\ &= A(x-\tilde{x}) \iff (x-\tilde{x}) = A^{-1}r && A \text{ non singulière} \\ \Rightarrow\quad & \|x-\tilde{x}\| \le \|A^{-1}\|\|r\| \end{aligned}$$

Conditionnement

Définition : on appelle conditionnement d'une matrice carrée A, relatif à une norme subordonnée, le nombre réel $\chi(A)$:

$$\chi(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$$

Remarque : $\|I\| = \|AA^{-1}\| \le \|A\|\|A^{-1}\| \Rightarrow \chi(A)\ge 1$

Théorème : Si A est une matrice carrée, non singulière (régulière)

$$Ax=b,\quad A(x+\delta x)=b+\delta b \qquad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le \chi(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Perturbation du second membre

$$Ax=b,\quad (A+\delta A)(x+\delta x)=b \qquad \frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|}\le \chi(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

Perturbation de la matrice

Un problème est dit « **bien conditionné** » **si** $\chi(A)$ est proche de 1,
il est dit « **mal conditionné** » si $\chi(A)$ est grand (et mal posé si $\chi(A)$ est infini)

Conditionnement

1) $Ax = b \Rightarrow \|b\| \leq \|A\| \|x\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \|A\| \frac{1}{\|b\|}$

2) $A(x + \delta x) = b + \delta b \Rightarrow \delta b \leq A\,\delta x \Rightarrow \|\delta x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|\delta b\|$

1) + 2) $\Rightarrow \quad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$

$\boxed{\chi(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|}$

Remarque *:* si A est symétrique, si on note ses valeurs propres λ_i

$|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_i|, \ldots, |\lambda_n|, \quad \frac{1}{|\lambda_1|} = \left\|A^{-1}\right\|_2 \quad |\lambda_n| = \|A\|_2$

et donc $\chi_2(A) = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}$

Dans l 'exemple, $\chi_2(A) = 7363, \|\delta b\| = 0.0037$

la borne de l' erreur est de l' ordre de $\chi_2(A)\|\delta b\| = 27.2$ (on a trouvé 22.5)

Comment améliorer le conditionnement ?

Ajouter un « chouia » sur la diagonale

$$\chi_2(A + \mu I) = \frac{|\lambda_n + \mu|}{|\lambda_1 + \mu|}$$

Itérations !

$$Ax = b$$
$$\tilde{x} = gauss(A,b)$$
$$err = A\tilde{x} - b$$
$$A(\tilde{x} + \delta x) = b$$
$$A\delta x = \tilde{b} = b - A\tilde{x}$$

```
A = randn(n);
b= ones(n,1);
x = A\b;
err = A*x-b;
 norm(err)

ans = 2.8246e-013

dx = A\err;

 err2 = A*(x-dx)-b;
norm(err2)

ans = 6.4789e-014
```

TP - la relaxation

Le but du TP est d’écrire un programme matlab résolvant un système linéaire par la méthode de la relaxation

x = relax(A,b,w,nite,err)

Pour ce faire, il faut étudier l’évolution du rayon spectal

- mettez vous par binôme
- rédigez une page :
recto : ce que vous avez fait
verso ce que vous en pensez
- a rendre pour le 8 décembre à 17h30 (publication du corrigé)

Indices : créer un problème test,
les fonction `cputime` et `flops`
`tril` et `triu` pourraient vous simpl
et `diag(diag())` et `eig` aussi

Propriétés

Définition *:* on appelle quotient de Rayleigh la fonction $q_A(x)$

$$q_A(x) = \frac{x' Ax}{x' x}$$

Soit A une matrice carrée, on appelle polynôme caractéristique de A le polynôme défini par :

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Les n racines λ_i de ce polynôme sont les valeurs propres de A, v_i est un vecteur propre de A. Il existe n vecteurs v_i tels que :

$$A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$$

λ_i est une valeur propre de A,
v_i est un vecteur propre de A.

Théorème *:* si A est symétrique,

$$\max_i \lambda_i = \max_x q_A(x)$$